Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

9 mai 2023

Zone A après-midi | **Zone B** matin | **Zone C** après-midi

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

2223 – 7118

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 24]

Cette question vous demande d'examiner le nombre et la nature des points d'intersection de la représentation graphique de $y = \log_a x$, où $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ et la droite $y = x$ pour des ensembles particuliers de valeurs de a.

Dans cette question, vous pouvez soit utiliser la formule de changement de base d'un logarithme $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ ou la fonction permettant de changer la base d'un logarithme dans la calculatrice à écran graphique.

La fonction f est définie par

$$f(x) = \log_a x \text{ où } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } a \in \mathbb{R}^+,\ a \neq 1.$$

(a) Considérez les cas $a = 2$ et $a = 10$. Sur le même système d'axes, esquissez les trois représentations graphiques suivantes :

$$y = \log_2 x$$

$$y = \log_{10} x$$

$$y = x.$$

Légendez clairement chaque représentation graphique par son équation et indiquez la valeur de toute abscisse à l'origine non-nulle. [4]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Dans les parties (b) et (c), considérez le cas où $a = \mathrm{e}$. Notez que $\ln x \equiv \log_{\mathrm{e}} x$.

(b) Utilisez l'analyse pour trouver la valeur minimale de l'expression $x - \ln x$, en justifiant que cette valeur correspond à un minimum. [5]

(c) À partir de là, déduisez que $x > \ln x$. [1]

(d) Il existe des valeurs de a pour lesquelles la représentation graphique de $y = \log_a x$ et la droite $y = x$ ont des points d'intersection. Le tableau suivant donne trois intervalles pour la valeur de a.

Intervalle	Nombre de points d'intersection
$0 < a < 1$	p
$1 < a < 1{,}4$	q
$1{,}5 < a < 2$	r

En explorant la représentation graphique de $y = \log_a x$ pour différentes valeurs de a, écrivez les valeurs de p, q et r. [4]

Dans les parties (e) et (f), considérez $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Pour $1{,}4 \leq a \leq 1{,}5$, il existe une valeur de a telle que la droite $y = x$ est tangente à la représentation graphique de $y = \log_a x$ en un point P.

(e) Trouvez les coordonnées exactes de P et la valeur exacte de a. [8]

(f) Écrivez l'ensemble exact de valeurs de a telles que les représentations graphiques de $y = \log_a x$ et $y = x$ ont

(i) deux points d'intersection ; [1]

(ii) aucun point d'intersection. [1]

2. [Note maximale : 31]

Cette question vous demande d'examiner des fonctions linéaires et quadratiques construites de manière systématique à l'aide de suites arithmétiques.

Considérez la fonction $L(x) = mx + c$ pour $x \in \mathbb{R}$ où m, $c \in \mathbb{R}$ et m, $c \neq 0$.

Soit $r \in \mathbb{R}$ la racine de $L(x) = 0$.

Si m, r et c, dans cet ordre, forment une suite arithmétique, on dit alors que $L(x)$ est une fonction linéaire-SA.

(a) Montrez que $L(x) = 2x - 1$ est une fonction linéaire-SA. [2]

Considérez $L(x) = mx + c$.

(b) (i) Montrez que $r = -\dfrac{c}{m}$. [1]

(ii) Sachant que $L(x)$ est une fonction linéaire-SA, montrez que $L(x) = mx - \dfrac{m^2}{m+2}$. [4]

(iii) Indiquez toute autre restriction sur la valeur de m. [1]

Il y a seulement trois ensembles de valeurs **entières** de m, r et c, qui forment une fonction linéaire-SA. Une de celles-ci est $L(x) = -x - 1$.

(c) Utilisez la partie (b) pour déterminer les deux autres fonctions linéaires-SA dont les valeurs de m, r et c sont entières. [3]

Considérez la fonction $Q(x) = ax^2 + bx + c$ pour $x \in \mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et b, $c \in \mathbb{R}$.

Soit r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ les racines de $Q(x) = 0$.

(d) Écrivez une expression pour

(i) la somme des racines, $r_1 + r_2$, en fonction de a et b. [1]

(ii) le produit des racines, $r_1 r_2$, en fonction de a et c. [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Si a, r_1, b, r_2 et c, dans cet ordre, forment une suite arithmétique, on dit alors que $Q(x)$ est une fonction quadratique-SA.

(e) Sachant que $Q(x)$ est une fonction quadratique-SA,

(i) écrivez une expression pour $r_2 - r_1$ en fonction de a et b; [1]

(ii) utilisez vos réponses des parties (d)(i) et (e)(i) pour montrer que $r_1 = \dfrac{a^2 - ab - b}{2a}$; [2]

(iii) utilisez le résultat de la partie (e)(ii) pour montrer que $b = 0$ ou $a = -\dfrac{1}{2}$. [3]

Considérez le cas où $b = 0$.

(f) Déterminez les deux fonctions quadratiques-SA qui satisfont cette condition. [5]

Considérez maintenant le cas où $a = -\dfrac{1}{2}$.

(g) (i) Trouvez une expression pour r_1 en fonction de b. [2]

(ii) À partir de là ou par toute autre méthode, déterminez les valeurs exactes de b et c telles que des fonctions quadratiques-SA sont formées.

Donnez vos réponses sous la forme $\dfrac{-p \pm q\sqrt{s}}{2}$ où p, q, $s \in \mathbb{Z}^+$. [5]

Références :